

《孫子算經》中的雞兔問題及其在算術至代數思維過渡之可能應用

專題學生：109090036 林澤翔

指導教授：通識教育中心 英家銘老師

《孫子算經》與研究緣起

使用未知數的代數運算在十二年的國民義務教育中佔了很重要的一部分，以現行課綱為例：從國小的設定未知數、並以未知數建立關係式，國中一元一次方程式、等量公理與二元一次聯立方程式。代數思維賦予了學生一種能力：如果我們可以把一個問題轉換成代數式的形式，我們將有機會用數學方法找出答案。

在上英家銘教授的課程時，發現東亞早在漢代就有系統性的運算法則去解線性方程組了，使用的方法與現代的高斯消去法相去不遠。在查詢相關的書籍時，我注意到《孫子算經》中探討的數學問題和現今國中七年級的數學問題相似，但是《孫子算經》運用的解題方法卻是相對好上手的。在國中七年級時，學生常認為代數的思考方式過於抽象，導致解題上遇到了困難。因此我設想，我們可以參考《孫子算經》的脈絡來引領學生從算術思維過渡至代數思維。

所以在這個研究中，我們的研究問題是：**《孫子算經》的內容中，是否有適合幫助學生從算術思維過渡至代數思維的問題？我們又是否能夠將那些問題轉化為國中七年級教學現場可用的教學策略？**

本研究將使用數學史研究常用的文本分析方法進行研究。過程中不只要維持文本本身的語意，還須考量古籍作者的生活背景後，理解以當時數學家的數學方法，以回應文本中的解答與其論述背後的邏輯。另一方面，我們將從「算術思維」與「代數思維」的視角進行探討。我們將基於這兩種思維模式的觀點，探索《孫子算經》的內容，並嘗試提出可以幫助學生從算術思維逐步過渡到代數思維的教學策略。

東亞傳統算學的脈絡與《孫子算經》

《算經十書》包含《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《張丘建算經》、《綴術》、《五曹算經》、《五經算術》、《緝古算經》，是中國傳統數學著作的總集。公元656年，李淳風等完成注釋，頒行國子監算學館作為教材，並作為明算科的考試科目。

《孫子算經》原名《孫子算術》，在唐初李淳風改稱為「算經」。關於《孫子算經》的作者與成書時間均尚無定論，中國數學史學家錢寶琮則認為該書完成於公元400年前後。

《孫子算經》的內容包含基本運算與應用問題的解法。卷上明確地指出了整數的表示法與四則運算方法，卷中和卷下以應用題為主，運用卷上提及的方法解決情境問題。其中著名的應用問題有：「物不知數」，即現代的同餘問題；「雉兔問題」，即現代的雞兔同籠問題。



圖 1：《孫子算經》

文獻探討

一、認知發展階段論 (Cognitive-developmental theory)

在具體運思期 (concrete operational stage) 階段的兒童大約是國小中高年級。兒童對於世界的物理規律有更深刻的認識，他們可以進行一些基礎的邏輯思考。他們也不再以自我為中心思考問題，可以更客觀地著重在事物的特性上。這種去自我中心的思考模式是具體運思期重要的特徵，但是他們仍難以思考抽象的事物。

在形式運思期 (formal operational stage) 階段的兒童大約是國中至高中的階段。兒童開始能進行抽象的思考，處理假設性的問題，或是可能的問題。此階段的兒童已經可以將問題的形式和內容分開進行思考，這個過程包含歸納與推理，像是在具體事物中找出通則。這種思考模式是一個有組織的推論方法，可以幫助兒童更有系統的去發掘答案，可以對不存在的情形進行演繹推理。

二、算術思維與代數思維

算術思維 (arithmetic thinking) 泛指學生在進行算術操作時，直接對具體數值運算，而得到答案。算術思維的特點在其運算過程，過程具有情境性、特殊性、計算性的特色，過程中更常常與直覺有關。

透過代數思維 (algebraic thinking) 進行解題時，過程可以分成兩部分：第一部分是列式，會先將實際情境以代數式呈現；第二部分是運算與求解，以代數的方法進行符號的運算，運算過程與實際情境無關。



圖 2：用算術思維解決實際問題的模型 (鮑建生, 2009, 頁326)

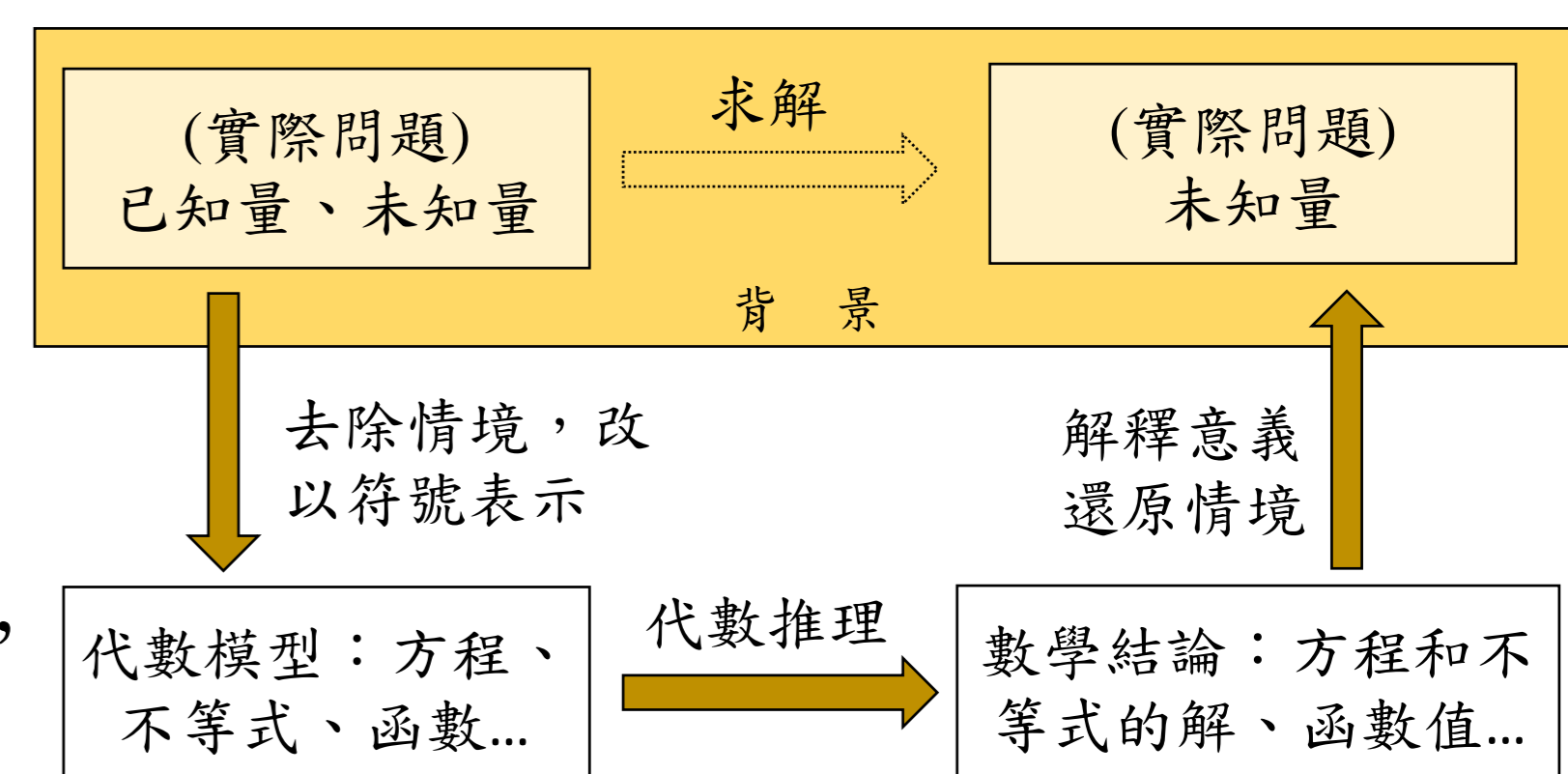


圖 3：用代數思維解決實際問題的模型 (鮑建生, 2009, 頁327)

《孫子算經》相關問題分析

〈卷下〉第 31 題：

今有雉、兔同籠，上有三十五頭，下九十四足。問雉、兔各幾何？

答曰：雉二十三。兔一十二。

術曰：上置三十五頭，下置九十四足。半其足，得四十七。以少減多，再命之，上三除下三，上五除下五。下有一除上一，下有二除上二，即得。

又術曰：上置頭，下置足。半其足，以頭除足，以足除頭，即得。

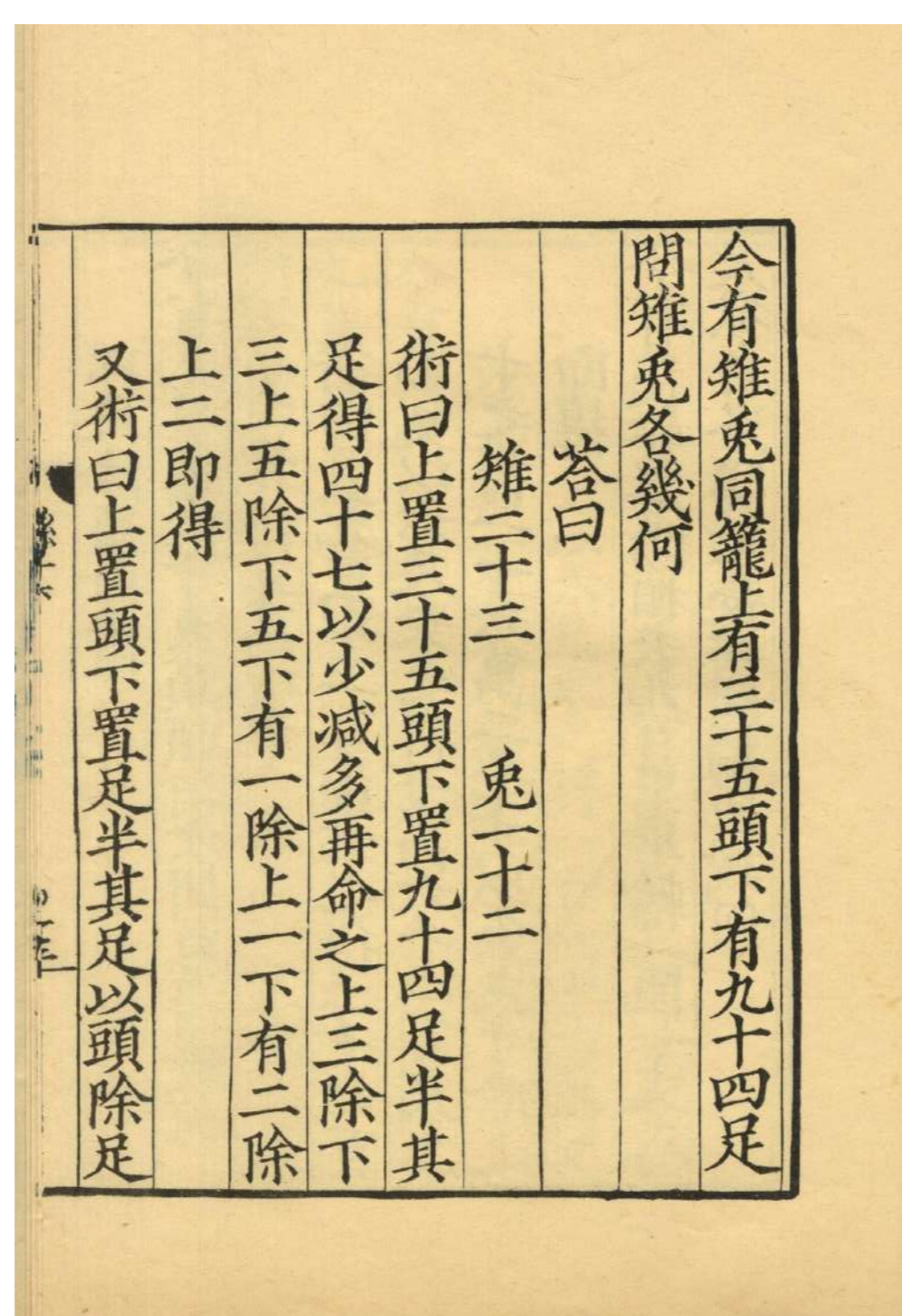


圖 4：《孫子算經》中的雞兔問題

一、《孫子算經》的解法

依照術曰描述的作法：我們先在上部放置 35，下部放置 94。我們將 94 除以二，得到 47。相對多的 47 減去相對少的 35，得到 12。接著 35 減去 12 得到 23。答案為野雞有 12 隻，兔子有 23 隻。

二、代數的解法

我們先假設雉有 x 隻，兔有 y 隻。依照題意我們可以列出聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = 35 \dots\dots (1) \\ 2x + 4y = 94 \dots\dots (2) \end{cases}$$

將 (1) 乘以 2 得到 $2x + 2y = 70$ 。這一式子和 (2) 有相同的 $2x$ ，所以將這兩式相減，得到 $2y = 24$ ，故 $y = 12$ 。將 $y = 12$ 代入 (1)，得到 $x = 23$ 。根據我們的假設，我們得到結論：雞有 23 隻，兔有 12 隻。

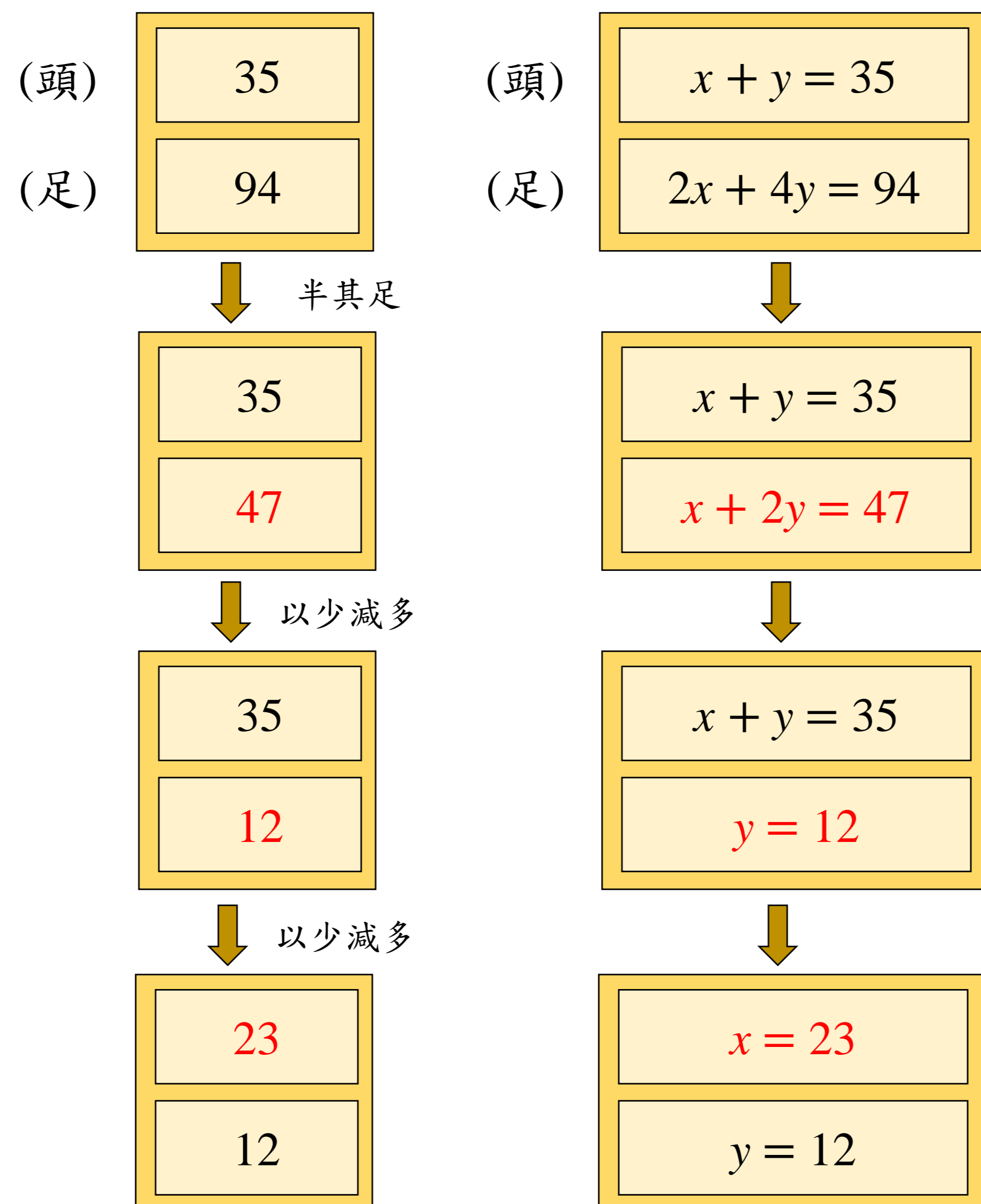


圖 5：雞兔問題—《孫子算經》的解法 圖 6：雞兔問題—代數方程式的解法

雞兔問題融入之教學策略

教學對象預計是國中七年級的學生。學生已經熟悉以未知數表達等量關係式，並可以依照題意列出一組含有兩個未知數的聯立方程式。

我們假定雞有 x 隻，兔子有 y 隻。並依照題目設定列出代數式：一隻雞有一個頭，現在有 x 隻雞，所以雞總共有 x 個頭；一隻兔子也是有一個頭，現在有 y 隻兔子，所以兔子總共有 y 個頭。依照題目設定，總共有 35 個頭，所以我們可以寫出頭的關係式： $x + y = 35$ 。我們還知道一隻雞有兩隻腳，一隻兔子有四隻腳，現在有 y 隻兔子，根據同樣的方法，我們可以寫出腳的關係式： $2x + 4y = 94$ 。

在第一式中，雞的個數和兔的個數各加了一次，得到 35；在第二式中，雞的個數加了兩次，兔的個數加了四次，得到 94。因為兩個式子中沒有相同的數字，所以我們無法透過比較數字得到雞或兔的資訊。

如果我們只計算雞和兔腳的個數的一半，那麼我們會知道腳的數量的總和會是 47。在這個情形下，因為雞有一個頭和一隻腳，所以雞的個數將會和雞腳的個數一樣。數值上的相等讓我們可以透過相減消去這一個數字。

於是我們透過 47 減掉 35，得到 12。在式子中，雞的個數被消除了，而兔的個數將從四次的一半，再減去一次，也就是一次。因此，我們可以知道 12 是兔子的個數。接著，我們比較 35 和 12，前者是雞和兔的個數的總和，後者是兔的個數。於是我們透過 35 減掉 12 得到 23，為雞的個數。這也解釋了為什麼《孫子算經》的結果裡上位代表了兔的個數，而下位代表了雞的個數。

結語

我們以算術思維的經驗作為基礎，從題目的設定開始思考，試著連結我們想知道的答案。我們以《孫子算經》〈卷下〉第 31 題為例，探討算術思維是如何一步步過渡到代數的運算方法，也為其中的每一步過程提供合理的解釋。希望有助於學生認知到代數的運算和算術的運算是一樣的，也可以因此更容易接納代數的方法。